

استدلال برای استخراج سری

در ابتدا نتایج به دست آمده $\frac{P(n)}{Q(n)}$ را به کسرها ساده تبدیل کرده و سپس به حاصل جمع آن ها می پردازیم.

همین و خصوصیت دیگری به صورت جمع قابل کثیر به عوامل در هر دو طرف داریم (تقریباً با هم برابر می آیند).

محاسبه استداک $\int \frac{P(n)}{Q(n)} dx$ برای کارهای استداکال فوق در حالتی که درجه $P(n)$ از درجه $Q(n)$ کمتر باشد (در صورتی

صورتی نمی در حالتی که درجه $P(n)$ از درجه $Q(n)$ کمتر باشد، $P(n)$ را بر $Q(n)$ تقسیم کرده و آن را به صورت

$$\frac{P(n)}{Q(n)} = q(n) + \frac{r(n)}{Q(n)}$$

را به کسرها ساده برمی آوریم.

$$n+r = A(n-1)(n+1) + Bn(n+1) + Cn(n-1)$$

$$n=0 \rightarrow r = A(-1)(1) + 0 + 0 \rightarrow r = -A \rightarrow \underline{A = -r}$$

$$n=1 \rightarrow 1+r = 0 + rB + 0 \rightarrow r = rB \rightarrow \underline{B=1}$$

$$n=-1 \rightarrow -1+r = 0 + 0 + (-C)(-r) \rightarrow r = +rC \rightarrow \underline{C=+1}$$

$$\int \frac{n+r}{n^r-n} dn = \int \frac{-r}{n} dn + \int \frac{r}{n-1} dn + \int \frac{1}{n+1} dn = -r \ln|n| + r \ln|n-1| + \ln|n+1| + C$$

حالت اول، $Q(x)$ به عدل اول تجزیه شود و ریشه‌های ثابتی ندارد،

$$Q(x) = (x-b_1)(x-b_r) \dots (x-b_n) \quad a_i \neq 0$$

حالت دوم، $\frac{P(x)}{Q(x)}$ به کسرهای ساده‌شده می‌رسیم؛

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{B_1}{x-b_1} + \frac{B_r}{x-b_r} + \dots + \frac{B_n}{x-b_n}$$

المنت انتیج به تساوی فوق، ضرایب $B_1, B_r, \dots, B_n$ را تعیین می‌کنیم.

$$\int \frac{x+r}{x^p-x} dx = \quad \text{مثال}$$

$$\frac{x+r}{x^p-x} = \frac{x+r}{x(x^{p-1}-1)} = \frac{x+r}{x(x-1)(x+1)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x-1} + \frac{C}{x+1} = \frac{A(x-1)(x+1) + Bx(x+1) + Cx(x-1)}{x(x-1)(x+1)}$$

$$x+r = A(x-1)(x+1) + Bx(x+1) + Cx(x-1)$$

مثلاً $\frac{P(x)}{Q(x)}$ را می توانیم به صورت $\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{A}{x-r} + \frac{B}{x-r} + \dots + \frac{C}{x-r}$ نمایش دهیم. در این صورت $\frac{P(x)}{Q(x)}$ را می توانیم به صورت $\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{A}{x-r} + \frac{B}{x-r} + \dots + \frac{C}{x-r}$ نمایش دهیم.

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{P(x)}{(x-b_1)^k} = \frac{B_1}{(x-b_1)} + \frac{B_2}{(x-b_1)^2} + \dots + \frac{B_k}{(x-b_1)^k}$$

صورت بر مخرج

$$\int \frac{dx}{x^r - r^r} = \int \left(\frac{-\frac{1}{r}}{x} + \frac{-\frac{1}{r}}{x^r} + \frac{\frac{1}{r}}{x-r} \right) dx = -\frac{1}{r} \ln|x| + \frac{1}{r} + \frac{1}{r} \ln|x-r| + C$$

$$\frac{1}{x^r - r^r} = \frac{1}{x^r(n-r)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x^r} + \frac{C}{n-r} = \frac{Ax(n-r) + B(n-r) + Cx^r}{x^r(n-r)}$$

$$1 = Ax(n-r) + B(n-r) + Cx^r$$

$$\begin{aligned} n=0 &\rightarrow 1=0+B(-r)+0 \rightarrow B=-\frac{1}{r} \\ n=r &\rightarrow 1=0+0+rC \rightarrow C=\frac{1}{r} \\ n=1 &\rightarrow 1=-A-B+C \rightarrow 1=-A-\frac{1}{r}+\frac{1}{r} \rightarrow \frac{1}{r}=-A \end{aligned}$$

$$A=-\frac{1}{r}$$

$$\int \frac{dx}{x^2 - k} = \int \frac{1}{n-y} dx + \int \frac{-1}{n+y} dx = \frac{1}{k} \ln|n-y| - \frac{1}{k} \ln|n+y| + C$$

$$\frac{1}{x^2 - k} = \frac{1}{(n-y)(n+y)} = \frac{A}{n-y} + \frac{B}{n+y} = \frac{A(n+y) + B(n-y)}{(n-y)(n+y)}$$

$$1 = A(n+y) + B(n-y)$$

$$n=y \quad \rightsquigarrow \quad 1 = A(k) + 0 \quad \rightsquigarrow \quad A = \frac{1}{k}$$

$$n=-y \quad \longrightarrow \quad 1 = 0 + B(-k) \quad \rightsquigarrow \quad B = -\frac{1}{k}$$

$$\Rightarrow \int \frac{dx}{x^r + rx^r} = \int \frac{-\frac{1}{q}}{u} du + \int \frac{\frac{1}{r}}{u^r} du + \int \frac{\frac{1}{q}}{(u+r)} du = -\frac{1}{q} \ln|u| - \frac{1}{r} \left(\frac{1}{u}\right) + \frac{1}{q} \ln|u+r| + C$$

$$\frac{1}{x^r + rx^r} = \frac{1}{x^r(n+r)} = \frac{A}{u} + \frac{B}{u^r} + \frac{C}{u+r} = \frac{Ax(n+r) + B(n+r) + Cx^r}{x^r(n+r)}$$

$$1 = Ax(n+r) + B(n+r) + Cx^r$$

$$n=0 \rightarrow 1 = rB \rightarrow B = \frac{1}{r}$$

$$n=-r \rightarrow 1 = qC \rightarrow C = \frac{1}{q}$$

$$n=1 \rightarrow 1 = rA + rB + C \rightarrow 1 = rA + \frac{r}{r} + \frac{1}{q}$$

$$1 = rA + \frac{1r}{q} \rightarrow rA = 1 - \frac{1r}{q} \rightarrow rA = -\frac{r}{q} \rightarrow A = -\frac{r}{q} \div r$$

$$A = -\frac{r}{q} \times \frac{1}{r} = -\frac{1}{q}$$

3

$$\int \frac{x-y}{x^2-y^2} dx = \int \frac{x}{x^2-y} dx + \int \frac{-y}{x^2-y} dx = y \ln|x-y| + y \ln|x+y| + C$$

$$\frac{a^2 - b^2}{a^2 - c^2} = \frac{a - b}{(a - b)(a + b)} = \frac{1}{a + b} + \frac{b}{a + b} = \frac{a + b}{(a - b)(a + b)}$$

$$\partial_{x-y} = A(x+y) + B(x-y)$$

$$\mathcal{N} = \mathcal{Y} \quad \longrightarrow \quad \mathcal{N} = A(\mathcal{Y}) + \mathcal{O} \quad \longrightarrow \quad \mathcal{K}A = \mathcal{N} \quad \hookrightarrow \quad A = \mathcal{Y}$$

[illegible]